Eigenschaften von Systemen

Ein Vortrag von

Steffen Schröder

(sschroed@informatik.uni–frankfurt.de)

im Rahmen des Proseminars 1999/2000 »Eingebettete Systeme«
veranstaltet von

Prof. Dr. Waldschmidt & Dr. Christoph Grimm

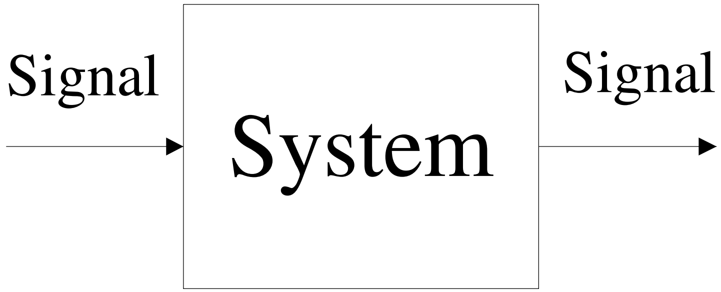
an der

Johann Wolfgang Goethe–Universität Frankfurt

Inhalt

- **Signale, Systembegriff**
- **Systembeschreibung**
- **Systemeigenschaften**
- **einige wichtige Begriffe**

Systembegriff

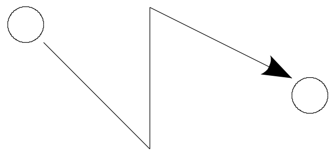


- Abgeschlossene Einheit, die Signale umwandelt
- vergleichbar mit »Eintity« und »Architecture« in VHDL

Was ist ein Signal?

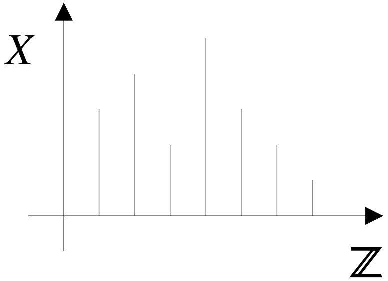
Signale repräsentieren Informationen:

- ✗ el. Spannung zwischen zwei Punkten
- ✗ el. Stomstärke in einem Leiter
- ✗ Temperaturverlauf
- ✗ Aktienkurse
- ✗ Wahlergebnisse



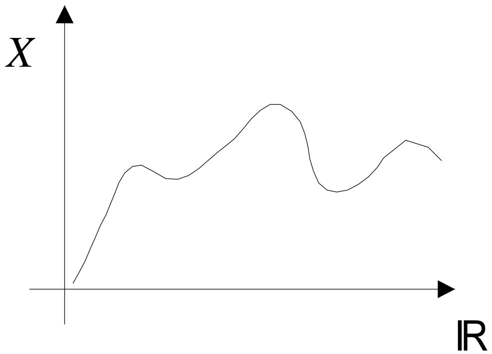
$$\sigma \in (T \to X)$$

diskret: $T = \mathbb{Z}$



$x[t]: \mathbb{Z} \to X$

kontinuierlich: $T \in \mathbb{R}$

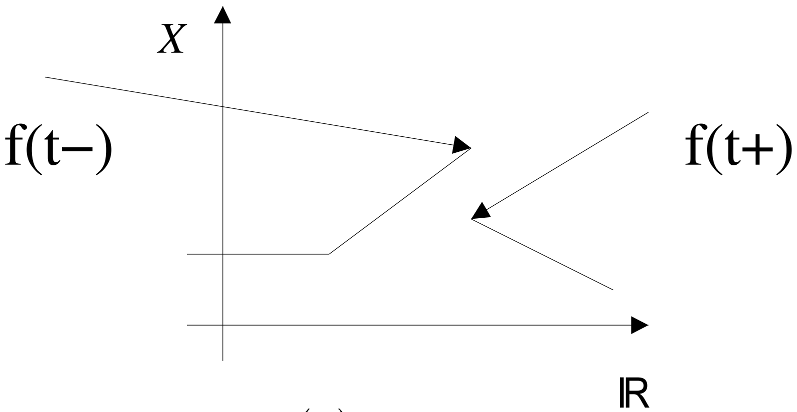


$x(t): \mathbb{R} \to X$

Signale

kontinuierlich

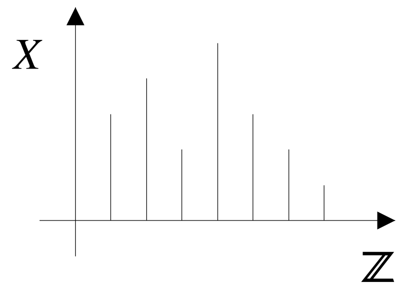
stückweise stetige Funktionen auf den reellen Zahlen



$$x(t): \mathbb{R} \rightarrow X$$

diskret

meist reellwertige Folgen über den ganzen Zahlen



$$x[t]: \mathbb{Z} \rightarrow X$$

Achtung:
x(t) und x[t] bezeichnen auch Signale, nicht nur einzelne Werte!

Entsprechend gibt es kontinuierliche und diskrete Systeme

Systembeschreibung

- **als Operator / Funktion**
- **mit inneren Zuständen**

  (ähnlich Automatenmodell)

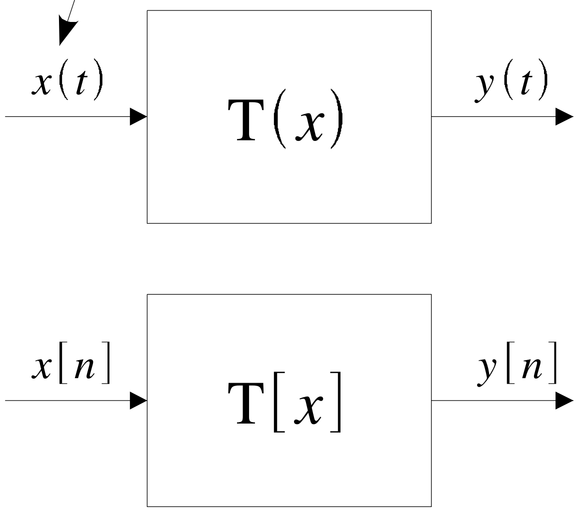
Systembeschreibung durch den Operator T

Wir stellen Signale als Funktionen dar, das wollen wir auch mit den Systemen tun:

mehrere Signale werden zu Vektoren zusammengefasst

kontinuierliche Systeme:

diskrete Systeme:



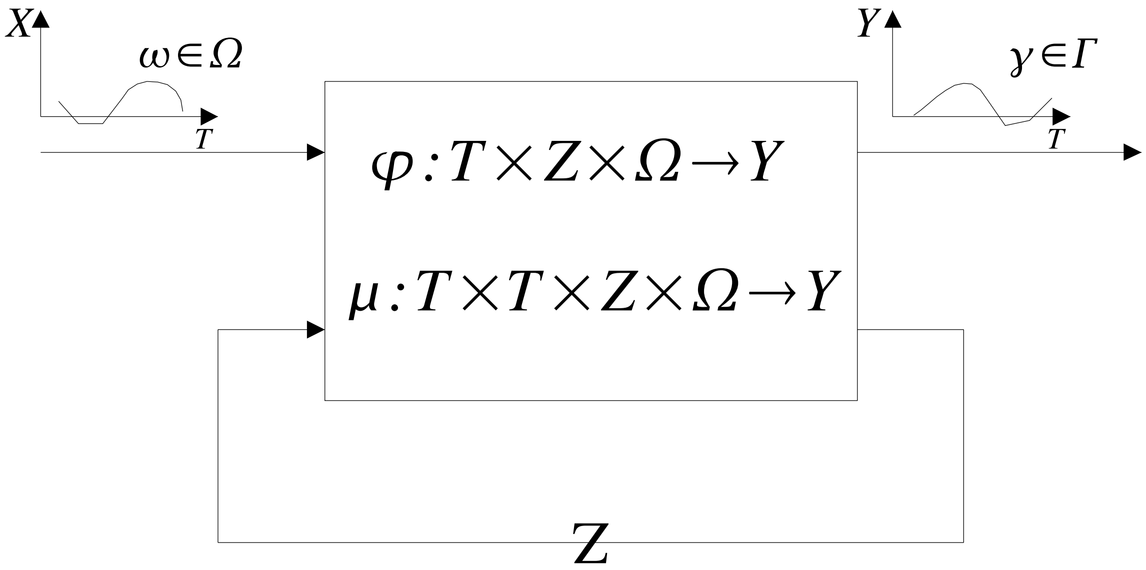
$$y(t)=\mathrm{T}(x(t))$$

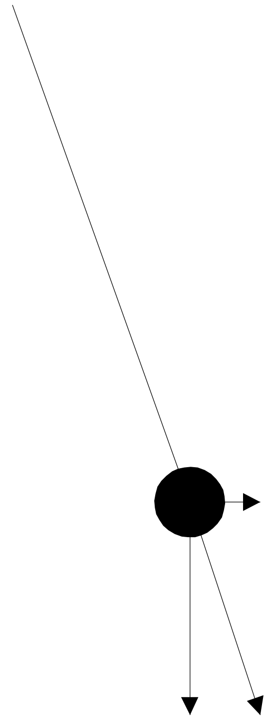
Signal! Signal!

$$y[n]=\mathrm{T}(x[n])$$

Wir betrachten nun hauptsächlich kontinuierliche Systeme, das meiste gilt analog auch für diskrete Systeme!

Systembeschreibung mit inneren Zuständen





Der Zustand Z kann z.B. der momentane Schwingungszustand des Fadenpendels sein

Eigenschaften von Systemen

- **Linearität**
- **Zeitinvarianz**
- **Kausalität**
- **Stabilität**

Linearität

$$\mathrm{T}\left(k_1 x^{(1)}(t)+k_2 x^{(2)}(t)\right)=k_1 y^{(1)}(t)+k_2 y^{(2)}(t)$$

oder: Additivität und Homogenität: $\mathrm{T}\left(kx(t)\right)=ky(t)$

Lineare Systeme antworten auf die Nullfunktion mit der Nullfunktion

---

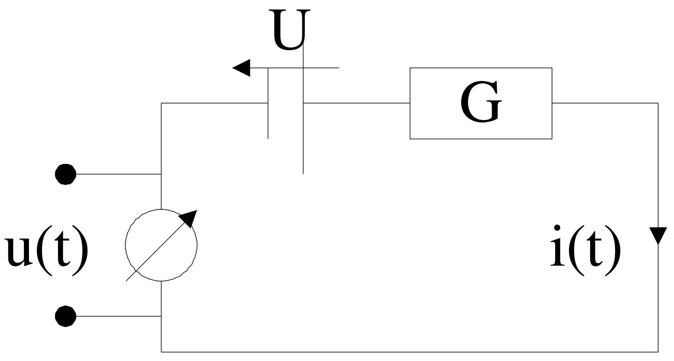
wenn

$$\langle x(t)\rangle \to 0 \Leftrightarrow \langle T(x(t))\rangle \to 0$$

dann

$$\mathrm{T}\left(\int_b^a k(\tau)\, x(t,\tau)\, d\tau\right)=\int_a^b k(\tau)\,\mathrm{T}\left(x(t,\tau)\right) d\tau$$

Linearität, Beispiel



Hier gilt offensichtlich:
$i(t)=Gu(t)+GU$
das ist kein lineares System.

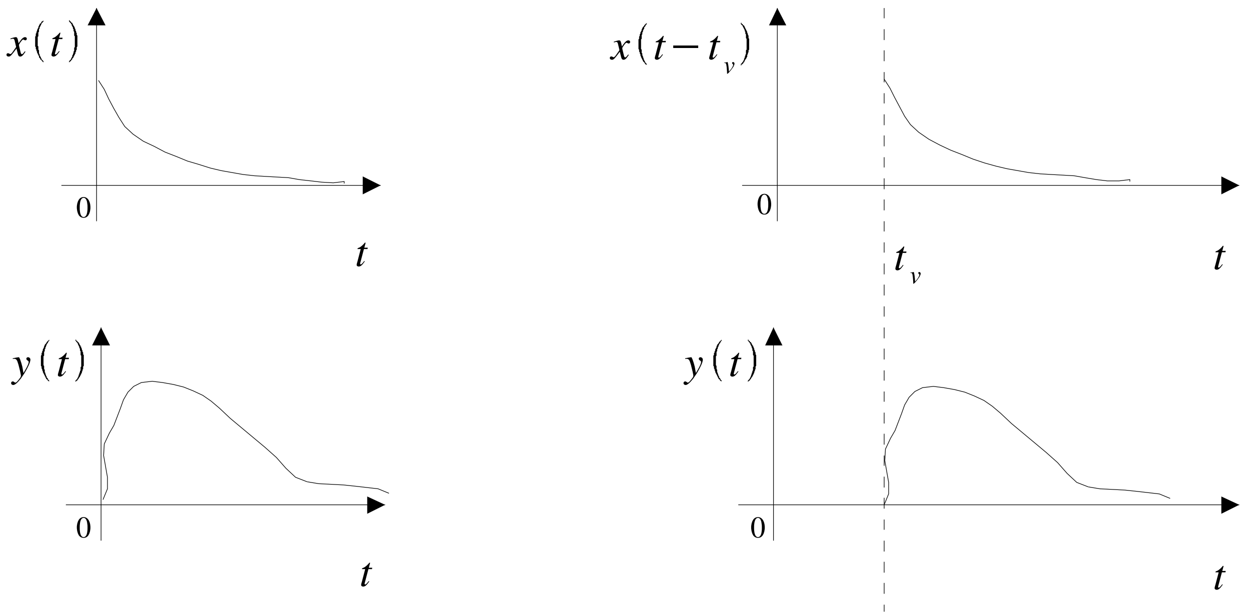
Aber wenn man die Stromdifferenz
$y(t)=i(t)-GU$
als Ausgangssignal sieht, ist das System
$y(t)=Gu(t)$
ein lineares.

Zeitinvarianz

Ein System heißt zeitinvariant, wenn gilt:

$$\mathrm{T}(x(t-t_v)) = y(t-t_v)$$

,wenn also die Reaktion auf ein Eingangssignal nicht von dessen Zeitpunkt abhängt.



Kausalität

Ein System heißt genau dann kausal, wenn das Ausgangssignal nur vom bisherigen Verlauf des Eingangssignales abhängt.

$$x^{(1)}(t) \equiv x^{(2)}(t) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{T}\left(x^{(1)}(t)\right) \equiv \mathrm{T}\left(x^{(2)}(t)\right) \quad \textit{für} \;\; t < t_1$$

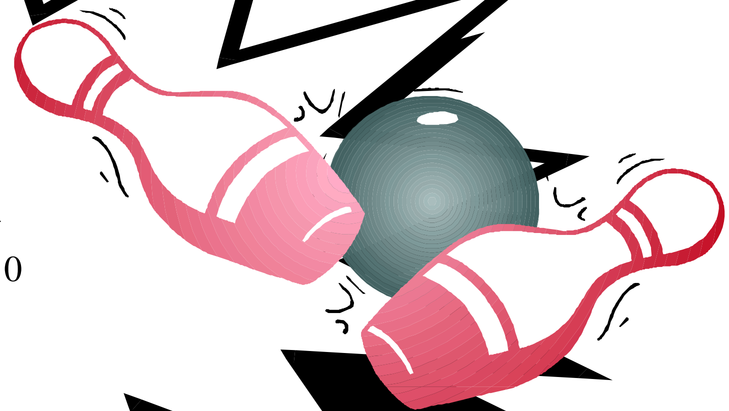
Gleiche Eingaben produzieren immer gleiche Ergebnisse!

Insbesondere Wahrsager
sind nicht kausal!

Stabilität

Stabile Systeme reagieren auf beschränkte Eingangssignale mit beschränkten Ausgangssignalen.

$$\left|x_\nu(t)\right| \le M_0 \Leftrightarrow \left|y_\mu(t)\right| \le N_0$$



Weitere Eigenschaften

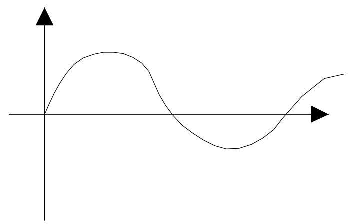
- ✗ **Gedächtnislosigkeit**
  Ein System hat das endliche Gedächtnis g, wenn $y(t-g)$ in $y(t)$ eingeht, ein unendliches gedächtnis, falls $y(-\infty)$ eingeht, ansonsten heißt es **dynamisch**.
- ✗ **Reellwertigkeit**
  $y(t)$ ist immer eine reelle Zahl.
- ✗ **Invertibilität**
  Man kann vom Ausgangssignal eindeutig auf das Eingangssignal schließen.

Weitere grundlegende Begriffe

- **Standardsignale**
- **Sprungantwort**
- **Impulsantwort**

Standardsignale

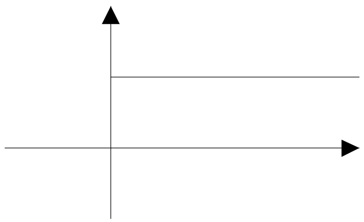
Darstellung der Sinusfunktion als



$$e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$$

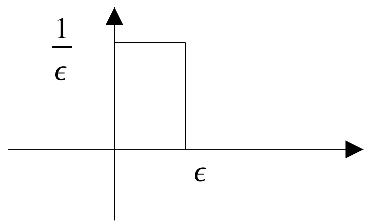
Sprungfunktion

$$s(t)=\begin{cases}0 & \textit{für } t<0\\ 1 & \textit{für } t>0\end{cases}$$



Impulsfunktion

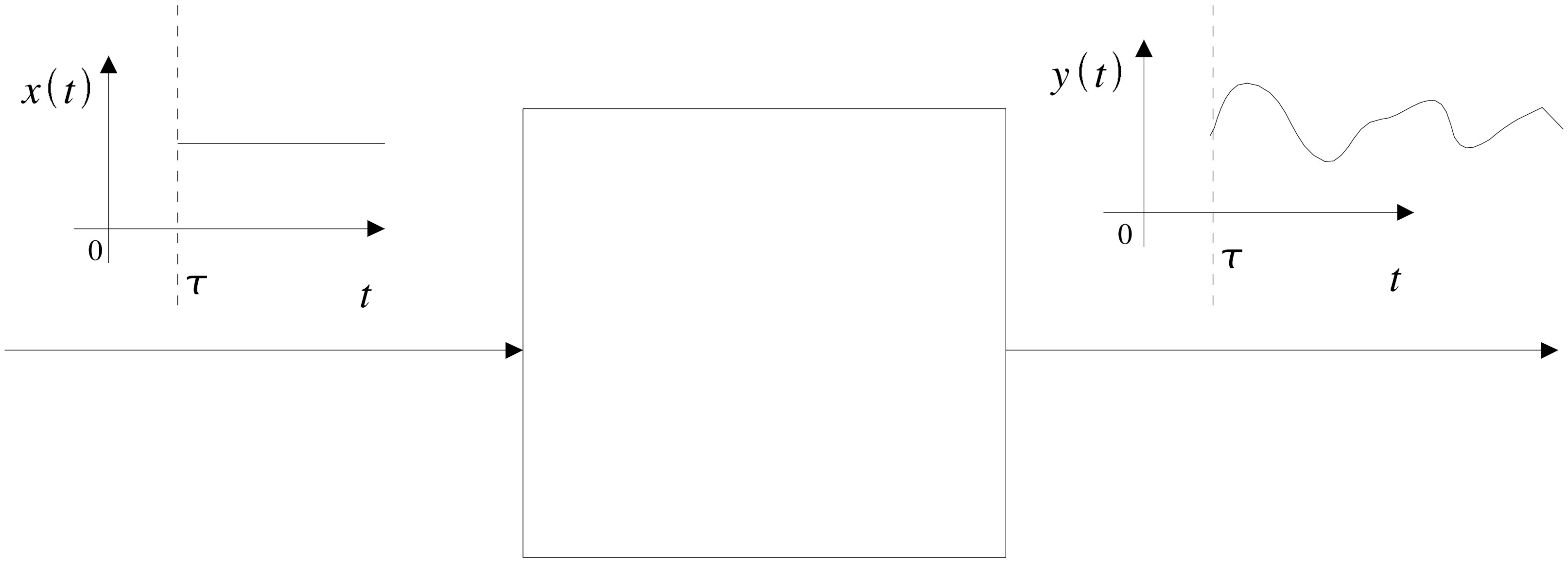
$$\delta(t)=\lim_{\epsilon\to 0} r_\epsilon(t)\quad,\quad r_\epsilon(t)=\begin{cases}\frac{1}{\epsilon} & \textit{für} \quad t=0\\ 0 & \textit{für} \quad t<0, t>0\end{cases}$$



Sprungantwort
(lineares System)

Antwort des Systems auf die Sprungfunktion

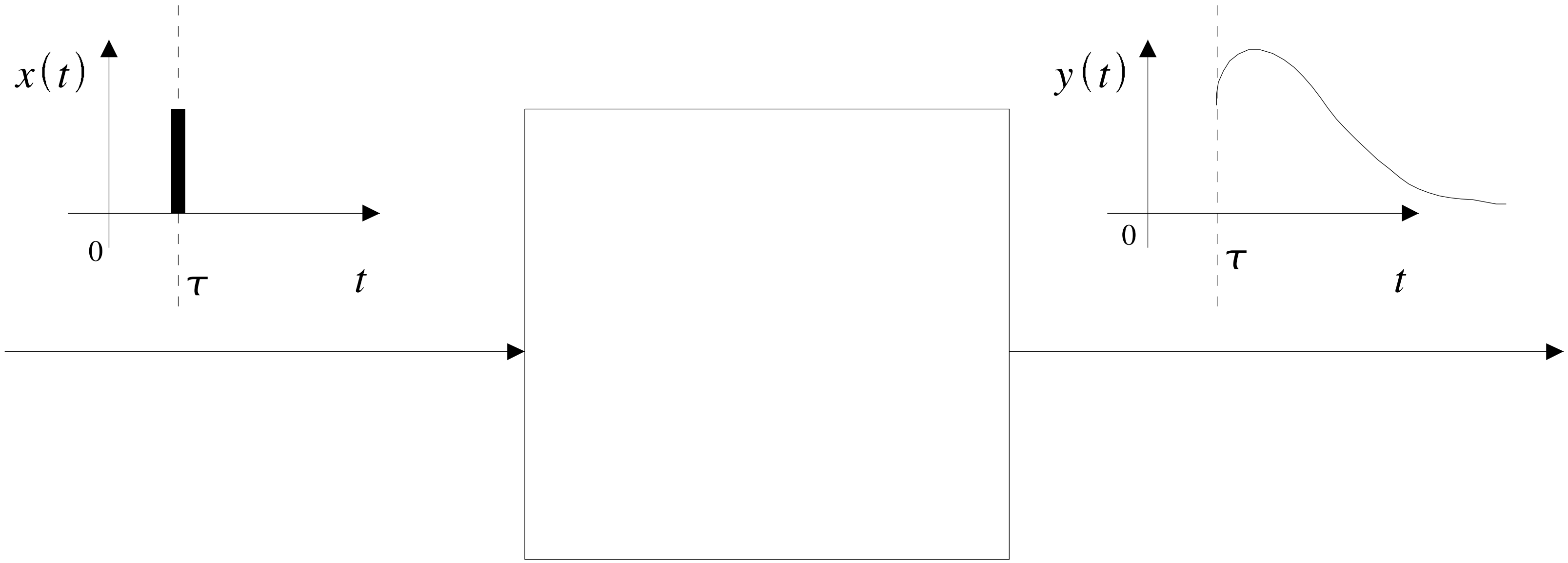
$$a(t,\tau) := T(s(t-\tau))$$



Impulsantwort

Antwort des Systems auf die Impulsfunktion

$$h(t,\tau) := T(\delta(t-\tau))$$



Sprungantwort als Systemcharakteristik

Man kann jede stückweise stetige Funktion darstellen als

$$f(t)=f(-\infty)+\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\,d\tau=f(-\infty)+\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\cdot s(t-\tau)\,d\tau$$

lineare kausale Systeme antworten auf ein solches x(t) mit

$$y(t)=x(-\infty)\,a(t,-\infty)+\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\,a(t,\tau)\,d\tau$$

bei zeitinvarianten Systemen

$$y(t)=x(-\infty)\,a(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau)\,a(t-\tau)\,d\tau$$

setzt die Erregung erst bei t=0 ein (Praxis), so ist $x(t)=x_e(t)+x(0+\ )\cdot s(t)$

$$y(t)=x(0+\ )\,a(t)+\int_{0}^{\infty} x_e{}'(\tau)\,a(t-\tau)\,d\tau$$

Zusammenfassung

- Ein **Signal** repräsentiert Informationen, es ist im allgemeinen eine zeitabhängige Funktion
- Ein **System** ist eine in sich abgeschlossene Einheit, die Signale in Abhängigkeit von ihrem inneren Zustand ineinander umwandelt.
- **Eigenschaften** von Systemen:
  linear, kausal, zeitinvariant, stabil, dynamisch
- Es genügt, die Sprungantwort oder die Impulsantwort eines linearen, kausalen Systems zu kennen, um es vollständig zu beschreiben.