Eigenschaften von Systemen

Vortrag zum Proseminar 1999/2000
„Eingebettete Systeme“

Steffen Schröder
(sschroed@informatik.uni-frankfurt.de)

13. Januar 2000

Literatur: Unbehauen: „Systemtheorie“,Oldenbourg-Verlag, Kapitel 1+2

Inhaltsverzeichnis

1 Systembegriff

Was ist ein System? Dieser Begriff wird in sehr vielen Bereichen benutzt, z.B. kennen wir aus der Physik den Energieerhaltungssatz: „In einem abgeschlossenen System...". Das ist jedoch nicht ganz was wir wollen.

Unsere Systeme sind zwar auch in sich geschlossene „Kästen", aber sie interagieren mit der Umwelt. Sie wandeln Signale ineinander um. Ein oder mehrere Eingangssignale werden verarbeitet zu Ausgangssignalen. Auch das Verhalten eines Systems müssen wir definieren. So kann man Systeme beispielsweise mit den Konstrukten Entity und Architecture in VHDL vergleichen.

Was aber sind nun Signale?

2 Signale

Signale repräsentieren Informationen. Z.B. ist die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten oder der Verlauf der Außentemperatur eine Information. Diese können wir durch mathematische Funktionen/Folgen nachbilden:

$$\sigma : T \to X$$

T ist hierbei ein Maßstab, meist die Zeit, die auf eine Menge, meist die reellen Zahlen, abgebildet wird. Ist T aus allen reellen Zahlen, so spricht man von kontinuierlichen, bei T aus den ganzen Zahlen von diskreten Signalen.

Kontinuierliche Signale werden im Allgemeinen durch stückweise Stetige Funktionen dargestellt, wobei auch Sprungstellen auftreten können. Man bezeichnet sie z.B. mit $x(t)$, wobei dies teilweise auch als komplette Funktion und nicht nur als Funktionswert aufgefasst wird.

Diskrete Signale $x[n]$ hingegen werden durch mathematische Folgen bestimmt.

3 Systembeschreibung

Systeme wandeln also solche Signale ineinander um. Aber wie können wir dieses Verhalten genauer beschreiben?

3.1 durch einen Operator

Wenn wir schon die Signale als Funktionen der Zeit betrachten, so können wir auch Systeme als Funktionen, also Operatoren, auf Signalen beschreiben:

$$y(t) = T(x(t))$$

Hierbei ist $y(t)$ das Ausgangssignal, $x(t)$ das Eingangssignal und $T(\cdot)$ ist der Operator, stellt also das System dar. Mehrere Eingangssignale können zu einem Vektor zusammengefasst werden, an der Schreibweise ändert sich dann nichts.

Im folgenden werde ich hauptsächlich kontinuierliche Systeme betrachten, die meisten Aussagen gelten analog auch für diskrete Signale/Systeme.

3.2 durch innere Zustände

Diese Darstellung ähnelt dem Automatenmodell, nur ist die Übergangsfunktion für die Zustnde nun nicht mehr diskret, sondern meist durch Differentialgleichungen spezifiziert.

Abhängig vom inneren Zustand berechnet die Ausgabefunktion aus dem Eingangssignal das Ausgangssignal, die Übergangsfunktion berechnet aus dem aktuellen Zustand (und vergangenen Zuständen) mit dem Eingangssignal den neuen Zustand.

Der Zustand kann zum Beispiel bei einem System, das ein Fadenpendel nachbildet, der aktuelle Schwingungszustand sein.

4 Eigenschaften von Systemen

4.1 Linearität

Lineare Systeme antworten auf eine Linearkombination gültiger Eingangssignale mit der entsprechenden Linearkombination der Ausgangssignale. Insbesondere folgt daraus die Homogenität, also $T(k \cdot x(t)) = k \cdot y(t)$, und die Addittivität, also $T(x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)) = y^{(1)}(t) + y^{(2)}(t)$ Auch impliziert dies, daß lineare Systeme auf die Nullfunktion mit der Nullfunktion antworten.

4.2 Zeitinvarianz

Ein System heißt genau dann zeitinvariant, wenn die Reaktion auf ein Ereignis nicht von dem genauen Zeitpunkt des Auftretens abhängt, also wenn $T(x(t - t_v)) = y(t - t_v)$ für alle t_v.

4.3 Kausalität

Bei einem kausalen System hängt das Ausgabesignal nur vom bisherigen Verlauf des Eingabesignals ab, nicht von dessen Werten in der Zukunft oder weiteren zufälligen Elementen. Es antwortet also auf gleiche Eingaben bit zum Zeitpunkt t_0 immer bis hierher auch mit der gleichen Ausgabe.

4.4 Stabilität

Ist bei einem stabilen System das Eingabesignal beschränkt, so ist auch das Ausgabesignal beschränkt, falls nur ein Ein- und ein Ausgabesignal existieren läßt sich also immer eine Zahl N finden, so daß $y(t) \leq N \cdot x(t)$ für alle t.

4.5 Gedächtnislosigkeit

Ein System hat das endliche Gedächtnis g, wenn bei der Berechnung des Ausgabesignals $y(t)$ auch $x(t - g)$ auftritt, also ein um g Eingheiten vergangener Wert des Eingabesignals berücksichtigt wird. Z.B. $x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\tau} d\tau$ hat ein unendliches Gedächtnis.

4.6 Reellwertigkeit

Ein System heißt reellwertig, wenn das Ausgabesignal nur Werte aus den reellen Zahlen annimmt.

4.7 Invertierbarkeit

Ein System heißt invertierbar, wenn man vom Ausgabesignal eindeutig auf das Eingabesignal zurückschließen kann, der Operator $T(\cdot)$ also bijektiv ist.

5 Weitere Begriffe

5.1 Standardsignale

5.1.1 Harmonische Exponentielle

Die Harmonische Exponentielle $e^{j\omega t}$ wird benutzt, um periodische Signale darzustellen, besonders die Coninusfunktion, da sie mathematisch leichter zu fassen ist: $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$

5.1.2 Sprungfunktion

Die Sprungfunktion $s(t)$ ist die Funktion, die für alle Ardumente $t < 0$ 0 liefert, für $t > 0$ jedoch 1.

5.1.3 Impulsfunktion

Die Impulsfunktion $\delta(t)$ liefert für alle $t \neq 0$ 0 als Ergebnis, für $T = 0$ aber einen unendlich hohen, schmalen Impuls.

5.2 Sprungantwort

Die Sprungantwort $a(t,\tau)$ ist die Antwort des Systems auf die Sprungfunktion, also bei zeitinvarianten Systemen $T(s(t-\tau))$. Sie ist deshalb so wichtig, da man sie in der Praxis meist recht leicht ermitteln kann, und weil bei linearen, kausalen Systemen sich nur durch ihre Kenntis das komplette System beschreiben läßt. Jede Stückweise stetige Funktion kann nämlich als Summe von Sprungfunktionen dargestellt werden, auf den Startwert wird zu jedem Zeitpunkt die momentane Ableitung aufaddiert $f(t) = f(-\infty) + \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.

5.3 Impulsantwort

Die Impulsantwort $h(t,\tau)$ eines Systems ist seine Antwort auf die um τ verschobene Impulsfunktion, also bei zeitinvarianten Systemen $T(\delta(t-\tau))$. Sie ist ähnich wichtig wie die Sprungantwort, da man auch alle Funktionen durch die Impulsfunktion beschreiben kann, sie ist nur in den meisten Fällen schwieriger experimentell zu bestimmen. Das macht aber nichts, da die Impulsantwort die Ableitung der Sprungantwort nach τ ist, genauso wie die Impulsfunktiion die Ableitung der Sprungfunktion ist.